УДК 621.762

**Хоменко О. І.**
**Баглюк Г. А.**
**Куріхін В. С.**

# МОДЕЛЮВАННЯ УЩІЛЬНЕННЯ ЦИЛІНДРО-КОНІЧНОЇ ПОРОШКОВОЇ ЗАГОТОВКИ В ЗАКРИТІЙ ЖОРСТКІЙ МАТРИЦІ

Для отримання порошкових матеріалів з високою густиною бажано обирати схеми ущільнення, що забезпечують закриття пор за рахунок інтенсивної деформації зсуву [1, 2]. Оскільки при ущільненні заготовок простої форми такої деформації досягнути не вдається [3], одним з рішень проблеми є використання заготовок складної форми, зокрема конічних. При ущільненні таких заготовок у матриці простої форми, наприклад, у циліндричній, конічна заготовка деформується зі значним зсувом, що у свою чергу забезпечує інтенсивне закриття пор. Проте ущільнення заготовок складної форми досліджене недостатньо.

Метою роботи є створення математичної моделі ущільнення заготовок, що складаються з циліндричних і конічних частин.

Розглянемо ущільнення у жорсткій прес-формі заготовки, схематично показаної на рис. 1, а, яка складається з першої циліндричної частини з радіусом основи $r_1$ і висотою $h_1$, другої циліндричної частини з радіусом основи $r_2$ і висотою $h_3$ і частини у вигляді усіченого конуса з радіусами основ $r_1$ і $r_2$, відповідно, та висотою $h_2$. Схему ущільнення показано на рис. 1, б. Нехай верхній пуансон 1 рухається у абсолютно жорсткій матриці 3 зі швидкістю $v_u$, а нижній пуансон 2 – на зустріч йому зі швидкістю $v_d$. При $v_u = 0$ або $v_d = 0$ матиме місце однобічне пресування, а при $v_u = v_d$ – двобічне симетричне. З фізичних міркувань зрозуміло, що верхній пуансон може пересуватися на відстань, що не перебільшує $h_1$. Для певності будемо вважати, що й нижній пуансон пересувається на відстань, що не перевищує $h_3$, попри те, що фізично він здатний просуватися навіть у конічній частині прес-форми.

а б

Рис. 1. Схема циліндроконічної заготовки (а) та схема її ущільнення (б):
1 – верхній пуансон; 2 – нижній пуансон; 3 – матриця

Розглянемо спочатку однобічне ущільнення верхнім пуансоном. У кожній частині заготовки матеріал при ущільненні буде рухатись по-різному. На осі заготовки радіальна складова швидкості плину матеріалу дорівнюватиме нулю, виходячи з умови рівноваги заготовки при ущільненні. У частині I (перша циліндрична частина) на поверхні заготовки радіальна складова швидкості плину матеріалу також дорівнюватиме нулю, виходячи з умови жорсткості прес-форми, тож будуть справедливі наступні граничні умови:

$$\left.\begin{aligned} v_r\big|_{r=0} &= 0 \\ v_r\big|_{r=r_1} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Нульові значення радіальної складової швидкості на поверхні циліндричної частини та на осі заготовки не виключають ненульових значень радіальної складової швидкості між віссю заготовки і поверхнею прес-форми, тож будемо вважати:

$$v_{Ir} = v_u \frac{a_3 \nu}{h_1} r^2 (r_1 - r) \cdot \left(1 + a_4 z (h_1 - z)\right), \tag{2}$$

де $a_3$ і $a_4$ – деякі параметри;

$\nu$ – коефіцієнт Пуассона. Дійсно, уявимо радіальну складову швидкості плину матеріалу у вигляді добутку деякої функції, що обертається в нуль при $r = 0$ і $r = r_1$, наприклад:

$$f(r) = a_3 r (R - r), \tag{3}$$

де $R$ – радіус основи циліндра;

$a_3$ – деякий параметр, та функції, що моделює плин матеріалу у радіальному напрямку при вільному осаджуванні циліндричної заготовки [1]:

$$v_r = v_u \frac{a_4 r \nu}{h} \left(1 + a_5 z (h - z)\right), \tag{4}$$

де $h$ – висота циліндра;

$a_4$ і $a_5$ – деякі параметри.

Вважаючи добуток довільних параметрів самостійним довільним параметром та змінюючи індекси параметрів, прийдемо до виразу (2).

У частині III (друга циліндрична частина) з аналогічних міркувань будуть справедливі такі ж самі граничні умови:

$$\left.\begin{aligned} v_r\big|_{r=0} &= 0 \\ v_r\big|_{r=r_2} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Так само будемо вважати, що радіальна складова швидкості плину матеріалу між віссю заготовки та поверхнею прес-форми може бути ненульовою та змінюватись за кубічним законом відносно $r$:

$$v_{IIIr} = v_u \frac{a_5 \nu}{h_3} r^2 (r_2 - r) \cdot \left(1 + a_6 z (h_3 - z)\right), \tag{6}$$

де $a_5$ і $a_6$ – деякі параметри.

Навпаки, будь-яка точка на поверхні прес-форми у конічній частині II при ущільненні буде змушена рухатись не тільки в осьовому, але й в радіальному напрямку, і радіальна складова швидкості плину матеріалу у цій частині заготовки буде зумовлена в першу чергу ковзанням по конічній поверхні прес-форми. Радіальна складова швидкості на осі заготовки у другій частині так само повинна дорівнювати нулю, як у першій та третій частинах, виходячи з умови рівноваги заготовки при ущільненні. Припустимо, що радіальна складова швидкості плину по абсолютній величині зростає лінійно від нульового значення на осі до максимального значення на поверхні конічної частини $v_{IIR}$.

$$\left.\begin{aligned} v_r\big|_{r=0} &= 0 \\ v_r\big|_{r_2 \le R \le r_1} &= v_{IIR} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Водночас вимагатимемо, щоб на обох межах частин заготовки вектор швидкості плину або ковзання матеріалу змінював тільки свій напрямок. В загальному випадку можливо

урахувати зміну швидкості плину додатковим компонентом енергетичного функціоналу. Цю вимогу введено заради спрощення, при суттєвих відхиленнях від експериментальних результатів її можна буде скасувати при удосконаленні моделі.

У [4] запропоновано співвідношення для осьової складової швидкості плину, що добре узгоджується з експериментальними результатами ущільнення циліндричних порошкових заготовок у закритому штампі:

$$v_z = -v_u \frac{z}{h}\left(1 - a_1\left(1 + a_2 \frac{r^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right), \tag{8}$$

де $h$ – висота циліндричної заготовки.

Оскільки у подальшому будемо розглядати ще й однобічне ущільнення нижнім пуансоном, при якому найменша осьова координата заготовки буде відрізнятися від нуля та постійно змінюватись при ущільненні, дещо змінимо вираз (8), отриманий у припущенні $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = h$:

$$v_z = -\frac{v_u (z - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1\left(1 + a_2 \frac{r^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{\max}}\right)\right), \tag{9}$$

та будемо вважати, що саме за таким законом матеріал рухається при ущільненні у циліндричних – першій та третій – частинах заготовки. Згідно цьому співвідношенню та з урахуванням того, що для першої частини заготовки $R = r_1 = const$, а для третьої – $R = r_2 = const$, швидкості ковзання матеріалу по бічній поверхні прес-форми та швидкості плину матеріалу на осі заготовки на межах частин I-II та II-III мають дорівнювати:

$$\left.\begin{aligned}
v_{\kappa I-II} &= v_{Iz}\big|_{r=r_1} = \frac{-v_u (h_3 + h_2 - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1(1 + a_2)\left(1 - \frac{h_3 + h_2}{z_{\max}}\right)\right)\\
v_{\kappa II-III} &= v_{IIIz}\big|_{r=r_2} = \frac{-v_u (h_3 - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1(1 + a_2)\left(1 - \frac{h_3}{z_{\max}}\right)\right)\\
v_{I-II} &= v_{Iz}\big|_{r=0} = -\frac{v_u (h_3 + h_2 - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1\left(1 - \frac{h_3 + h_2}{z_{\max}}\right)\right)\\
v_{II-III} &= v_{IIIz}\big|_{r=0} = \frac{-v_u (h_3 - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1\left(1 - \frac{h_3}{z_{\max}}\right)\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Співвідношення (10) є умовами нерозривного поля швидкостей на межах циліндричних та конічної частин прес-форми. Спробуємо знайти такий закон плину матеріалу у конічній частині заготовки, що задовольняв би цим умовам.

Припустимо, що швидкість ковзання матеріалу на межі першої та другої частин прес-форми дорівнює деякому значенню $v_\kappa$. Розкладемо це значення на радіальну та осьову складові. З геометричних міркувань (рис. 1, а):

$$\left.\begin{aligned}
v_{\kappa r}\big|_{r=r_1} &= v_\kappa \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}}\\
v_{\kappa z}\big|_{r=r_1} &= v_\kappa \frac{h_2}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}}
\end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

При ущільненні одним верхнім пуансоном швидкість ковзання матеріалу по поверхні прес-форми на межі другої та третьої частин заготовки визначатиметься виключно осьовою складовою швидкості плину, тому природно припустити зміну радіальної складової швидкості ковзання від найбільшого значення, що визначається першим рівнянням системи (11), до нуля, а також зміну осьової складової швидкості ковзання від значення, що визначається другим рівнянням системи (11), до значення, що визначається другим рівнянням системи (10). Припустимо, що в конічній частині заготовки осьова складова швидкості руху також змінюється за законом (9), але радіус заготовки не є постійним, а лінійно залежить від осьової координати:

$$R(z) = \frac{(r_1 - r_2)(z - h_3)}{h_2} + r_2, \tag{12}$$

Очевидно, що такий закон плину не забезпечить нерозривного поля швидкостей на поверхні прес-форми, але, якщо ввести функцію нормування $k(r,z)$ наступного вигляду:

$$k(r,z) = 1 + \left( \frac{h_3 - z}{h_2} - \frac{h_3 - z}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}} \right) \left( \frac{h_2 r}{(r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2} \right), \tag{13}$$

яка буде приймати значення $k(R(z),z) = h_2 / \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}$ біля стінки конічної частини прес-форми та $k(r,z)\big|_{r=0} = 1$ і $k(r,z)\big|_{r=r_2;z=z_3} = 1$, тим самим умови (10) будуть задовольнятися. Дійсно, на осі заготовки $k(0,z) = 1$ і швидкість плину визначається тільки осьовою складовою, на межі першої та другої частин заготовки біля стінки прес-форми осьова складова зменшується для забезпечення незмінної сумарної швидкості ковзання, а на межі другої та третьої частин $k(r,z) = 1$, оскільки радіальна складова швидкості плину зменшується до 0 і швидкість плину знов-таки визначається тільки осьовою складовою. Радіальну складову швидкості плину, згідно (1), припустивши, що вона змінюється лінійно від нульового значення на осі заготовки до максимального по абсолютній величині на стінках прес-форми, можна знайти через осьову:

$$v_{IIr} = \frac{(r_1 - r_2)r}{(r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2} v_{IIz} = l(r,z) v_{IIz}. \tag{14}$$

Остаточно:

$$\left.\begin{aligned} v_{IIz} &= -\frac{v_u (z - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}} \left( 1 - a_1 \left( 1 + a_2 \frac{h_2^2 r^2}{((r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2)^2} \right) \left( \frac{z_{\max} - z}{z_{\max}} \right) \right) \times \\ &\times \left( 1 + \left( \frac{h_3 - z}{h_2} - \frac{h_3 - z}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}} \right) \left( \frac{h_2 r}{(r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2} \right) \right) \\ v_{IIr} &= -\frac{v_u (z - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}} \left( 1 - a_1 \left( 1 + a_2 \frac{h_2^2 r^2}{((r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2)^2} \right) \left( \frac{z_{\max} - z}{z_{\max}} \right) \right) \times \\ &\times \frac{(r_1 - r_2)r}{(r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2} \left( 1 + \left( \frac{h_3 - z}{h_2} - \frac{h_3 - z}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}} \right) \left( \frac{h_2 r}{(r_1 - r_2)(z - h_3) + r_2 h_2} \right) \right) \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Складові швидкості плину (15) забезпечують однакові значення швидкості ковзання на межах першої та другої та другої та третьої частин заготовки, а також однакові значення осьової складової швидкості плину матеріалу на осі заготовки на вказаних межах. У зв'язку тим, що моделювання ущільнення буде виконуватися у чисельній формі, для уникнення надто громіздких і незручних для програмування співвідношень введемо наступні умовні позначення:

$$V(r,z)=\frac{(z-z_{\min})}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_1\left(1+a_2\frac{h_2^2r^2}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}\right)\left(\frac{z_{\max}-z}{z_{\max}}\right)\right); \tag{16}$$

$$U_z=\frac{\partial V(r,z)}{\partial z}=-\frac{1}{z_{\max}-z_{\min}}-\frac{a_1(2z-z_{\max}-z_{\min})}{z_{\max}(z_{\max}-z_{\min})}-a_1a_2\left(\frac{(2z-z_{\max}-z_{\min})h_2^2r^2}{z_{\max}(z_{\max}-z_{\min})((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2h_2^2r^2(z^2-z(z_{\max}+z_{\min})+z_{\max}z_{\min})}{z_{\max}(z_{\max}-z_{\min})((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^3}\right); \tag{17}$$

$$U_r=\frac{\partial V(r,z)}{\partial r}=\frac{2a_1a_2h_2^2r\left(z^2-z(z_{\max}+z_{\min})+z_{\max}z_{\min}\right)}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2z_{\max}(z_{\max}-z_{\min})}; \tag{18}$$

$$K_z=\frac{\partial k(r,z)}{\partial z}=\frac{h_2r\left(h_2-\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}\right)}{h_2\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)}-\frac{2h_2r(h_3-z)\left(\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}-h_2\right)}{h_2\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}; \tag{19}$$

$$K_r=\frac{\partial k(r,z)}{\partial r}=\frac{(h_3-z)\left(\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}-h_2\right)}{\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)}; \tag{20}$$

$$L_z=\frac{\partial l(r,z)}{\partial z}=-\frac{(r_1-r_2)^2r}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}; \tag{21}$$

$$L_r=\frac{\partial l(r,z)}{\partial r}=\frac{(r_1-r_2)}{(r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2}. \tag{22}$$

Компоненти тензора швидкостей деформації обчислюємо наступним чином:

$$e_{Ir}=\frac{a_3v_u\nu}{h_1}(1+a_4z(h_1-z))\left(2r_1r-3r^2\right);$$
$$e_{IIr}=v_u\left(U_rl(r,z)k(r,z)+V(r,z)(l(r,z)K_r+L_rk(r,z)\right);$$
$$e_{IIIr}=\frac{a_5v_u\nu}{h_1}(1+a_6z(h_3-z))\left(2r_2r-3r^2\right)$$

$$e_{Iz}=\frac{-v_u}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_1\left(1+a_2\frac{r^2}{r_1^2}\right)\left(\frac{z_{\max}+z_{\min}-2z}{z_{\max}}\right)\right);$$
$$e_{IIz}=v_u(U_zk(r,z)+V(r,z)K_z); \tag{23}$$
$$e_{IIIz}=\frac{-v_u}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_1\left(1+a_2\frac{r^2}{r_2^2}\right)\left(\frac{z_{\max}+z_{\min}-2z}{z_{\max}}\right)\right).$$

$$e_{I\varphi} = \frac{a_3 v_u vr(r_1 - r)\left(1 + a_4 z(h_1 - z)\right)}{h_1};$$

$$e_{II\varphi} = \frac{v_u V(r,z)k(r,z)l(r,z)}{r};$$

$$e_{III\varphi} = \frac{a_5 v_u vr(r_2 - r)\cdot\left(1 + a_6 z(h_3 - z)\right)}{h_3}.$$

$$\gamma_{Irz} = \frac{2a_1 a_2 v_u r(z - z_{\min})(z_{\max} - z)}{r_1^2 z_{\max}(z_{\max} - z_{\min})} + \frac{a_3 a_4 v_u vr^2(r_1 - r)(h_1 - 2z)}{h_1};$$

$$\gamma_{IIrz} = v_u(U_r k(r,z) + V(r,z)K_r + U_z k(r,z)l(r,z) + V(r,z)(K_z l(r,z) + L_z k(r,z)));$$

$$\gamma_{IIIrz} = v_u\left(\frac{2a_1 a_2 r(z - z_{\min})(z_{\max} - z)}{r_2^2 z_{\max}(z_{\max} - z_{\min})} + \frac{a_5 a_6 vr^2(r_2 - r)(h_3 - 2z)}{h_3}\right).$$

Тоді інтенсивність деформації:

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{(e_r - e_z)^2 + (e_z - e_\varphi)^2 + (e_r - e_\varphi)^2 + 6\gamma_{rz}^2}\ . \tag{24}$$

Для моделювання ущільнення скористуймося прямим варіаційним методом. Складова енергетичного функціоналу, що визначається внутрішніми силами опору деформації, з урахуванням того, що елемент об'єму $dV = rdrdzd\varphi$, матиме наступний вигляд:

$$J_1 = \Sigma\iiint_V \sqrt{(e_r + e_\varphi + e_z)^2 f_1(\theta) + H^2 f_2(\theta)}dV\ , \tag{25}$$

Швидкість ковзання матеріалу на бічних стінках матриці для усіх частин заготовки згідно (10)–(15) визначається одним і тим самим співвідношенням:

$$v_{\kappa I} = v_{Iz}\big|_{r=r_1} = v_{\kappa II} = v_{\kappa III} = v_{IIIz}\big|_{r=r_2} = v_\kappa = \frac{-v_u(z - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_1\left(1 + a_2\right)\frac{z_{\max} - z}{z_{\max}}\right). \tag{26}$$

Для першої та третьої частин заготовки треба також враховувати тертя на торцях верхнього та нижнього пуансонів. Якщо вважати коефіцієнт тертя однаковим для торців пуансонів та бічних стінок матриці, то складова варіаційного функціоналу, зумовлена тертям, для першої частини заготовки становитиме:

$$J_2 = \sqrt{3\mu}\left(\iint_{F_{Iu}}\sqrt{f_2(\theta)v_{Ir}^2}dF_{Iu} + \iint_{F_I}\sqrt{f_2(\theta)v_\kappa^2}dF_I + \iint_{F_{II}}\sqrt{f_2(\theta)v_\kappa^2}dF_{II} + \right.$$
$$\left. + \iint_{F_{III}}\sqrt{f_2(\theta)v_\kappa^2}dF_I + \iint_{F_{IIId}}\sqrt{f_2(\theta)v_{IIIr}^2}dF_{IIId}\right), \tag{27}$$

де $dF_{Iu} = rdrd\varphi$ $(0 \le r \le r_1)$ – елемент поверхні торця верхнього пуансона;

$dF_{II} = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}\,d\varphi dz$, $dF_{III} = r_2 d\varphi dz$ – елементи бічних поверхонь першої, другої та третьої частин заготовки, відповідно;

$dF_{IIId} = rdrd\varphi$ $(0 \le r \le r_2)$ – елемент поверхні торця нижнього пуансона.

Варіюванням коефіцієнтів $a_i$ мінімізуємо суму $J = J_1 + J_2$. Після цього, визначивши певні інтервали часу, можна розрахувати положення будь-якої точки заготовки при русі пуансона.

Тепер хай верхній пуансон буде нерухомим, а нижній рухатиметься з швидкістю $v_d$. Повторюючи наведені вище міркування та приймаючи до уваги, що напрям руху нижнього пуансона співпадає з додатним напрямом осі $z$, отримаємо наступні рівняння для компонент швидкості плину:

$$\left.\begin{aligned}
v'_{Iz} &= \frac{v_d(z_{\max}-z)}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_7\left(1+a_8\frac{r^2}{r_1^2}\right)\left(\frac{z-z_{\min}}{z_{\max}-z_{\min}}\right)\right)\\
v'_{IIz} &= v_d V'(r,z)k'(r,z)\\
v'_{IIIz} &= \frac{v_d(z_{\max}-z)}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_7\left(1+a_8\frac{r^2}{r_2^2}\right)\left(\frac{z-z_{\min}}{z_{\max}-z_{\min}}\right)\right)\\
v'_{Ir} &= v_d\frac{a_9\nu}{h_1}r^2(r_1-r)\cdot\left(1+a_{10}z(h_1-z)\right)\\
v'_{IIr} &= v_d V'(r,z)k'(r,z)l(r,z)\\
v'_{IIIr} &= v_d\frac{a_{11}\nu}{h_3}r^2(r_2-r)\cdot\left(1+a_{12}z(h_3-z)\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

де

$$V'(r,z)=\frac{(z_{\max}-z)}{z_{\max}-z_{\min}}\left(1-a_7\left(1+a_8\frac{h_2^2r^2}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}\right)\left(\frac{z-z_{\min}}{z_{\max}-z_{\min}}\right)\right); \tag{29}$$

$$k'(r,z)=1+\left(\frac{h_2}{\sqrt{(r_1-r_2)+h_2^2}}+\frac{z-h_3}{h_2}\left(1-\frac{h_2}{\sqrt{(r_1-r_2)+h_2^2}}\right)-1\right)\frac{r(r_1-r_2)}{(r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2}. \tag{30}$$

Як у попередньому випадку, введемо деякі позначення для уникнення громіздких виразів. Нехай:

$$U'_r=\frac{\partial V'(r,z)}{\partial r}=-\frac{2a_7a_9h_2^2r\left(z^2-z(z_{\max}+z_{\min})+z_{\max}z_{\min}\right)}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2(z_{\max}-z_{\min})^2},$$

$$U'_z=\frac{\partial V'(r,z)}{\partial z}=\frac{1}{z_{\max}-z_{\min}}+\frac{a_7(2z-z_{\max}-z_{\min})}{(z_{\max}-z_{\min})^2}-a_7a_8\left(\frac{2z-z_{\max}-z_{\min}}{(z_{\max}-z_{\min})^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{h_2^2r^2}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}-\frac{2h_2^2r^2(z^2-z(z_{\max}+z_{\min})+z_{\max}z_{\min})}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^3(z_{\max}-z_{\min})^2}\right),$$

$$\left.\begin{aligned}
K'_r&=\frac{\partial k'(r,z)}{\partial r}=\left(\frac{h_2}{\sqrt{(r_1-r_2)+h_2^2}}+\frac{z-h_3}{h_2}\left(1-\frac{h_2}{\sqrt{(r_1-r_2)+h_2^2}}\right)-1\right)\frac{h_2}{(r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2};\\
K'_z&=\frac{\partial k'(r,z)}{\partial z}=\frac{2(r_1-r_2)h_2}{((r_1-r_2)(z-h_3)+r_2h_2)^2}\left(1-\frac{h_2}{\sqrt{(r_1-r_2)+h_2^2}}\right).
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Компоненти тензора швидкостей деформації для однобічного ущільнення нижнім пуансоном обчислюються наступним чином:

$$e'_{Ir} = \frac{a_9 v_d \nu}{h_1}(1 + a_{10} z(h_1 - z))(2r_1 r - 3r^2);$$

$$e'_{IIr} = v_d \left(U'_r l(r,z) k'(r,z) + V'(r,z)(l(r,z) K'_r + L_r k'(r,z)\right);$$

$$e'_{IIIr} = \frac{a_{11} v_d \nu}{h_1}(1 + a_{12} z(h_3 - z))(2r_2 r - 3r^2);$$

$$e'_{Iz} = -\frac{v_d}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_7\left(1 + a_8 \frac{r^2}{r_1^2}\right)\frac{z_{\max} + z_{\min} - 2z}{(z_{\max} - z_{\min})}\right);$$

$$e'_{IIz} = v_d \left(U'_z k'(r,z) + V'(r,z) K'_z\right);$$

$$e'_{IIIz} = -\frac{v_d}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_7\left(1 + a_8 \frac{r^2}{r_2^2}\right)\frac{z_{\max} + z_{\min} - 2z}{(z_{\max} - z_{\min})}\right); \qquad (32)$$

$$e'_{I\varphi} = \frac{v_d a_9 \nu}{h_1} r(r_1 - r) \cdot (1 + a_{10} z(h_1 - z));$$

$$e'_{II\phi} = \frac{v_d}{r} V'(r,z) k'(r,z) l(r,z);$$

$$e'_{III\varphi} = \frac{v_d a_{11} \nu}{h_3} r(r_2 - r) \cdot (1 + a_{12} z(h_3 - z)).$$

$$\gamma'_{Irz} = -v_d \left(\frac{2a_7 a_8 r(z - z_{\min})(z_{\max} - z)}{r_1^2 (z_{\max} - z_{\min})^2} + \frac{a_9 a_{10} \nu r^2 (r_1 - r)(h_1 - 2z)}{h_1}\right);$$

$$\gamma'_{IIrz} = v_d \left((U'_r k'(r,z) + V'(r,z) K'_r) + (U'_z k'(r,z) l(r,z) + V'(r,z)(K'_z l(r,z) + k'(r,z) L_z))\right);$$

$$\gamma'_{IIIrz} = v_d \left(-\frac{2a_7 a_8 r(z - z_{\min})(z_{\max} - z)}{r_2^2 (z_{\max} - z_{\min})^2} + \frac{a_{11} a_{12} \nu r^2 (r_2 - r)(h_3 - 2z)}{h_3}\right).$$

Інтенсивність деформації:

$$H' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{(e'_r - e'_z)^2 + (e'_z - e'_\varphi)^2 + (e'_r - e'_\varphi)^2 + 6\gamma'^2_{rz}}. \qquad (33)$$

Швидкість ковзання матеріалу по бічній поверхні для усіх частин заготовки згідно (28) становитиме:

$$v'_\kappa = \frac{v_d (z_{\max} - z)}{z_{\max} - z_{\min}}\left(1 - a_7 (1 + a_8) \frac{z - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}\right). \qquad (34)$$

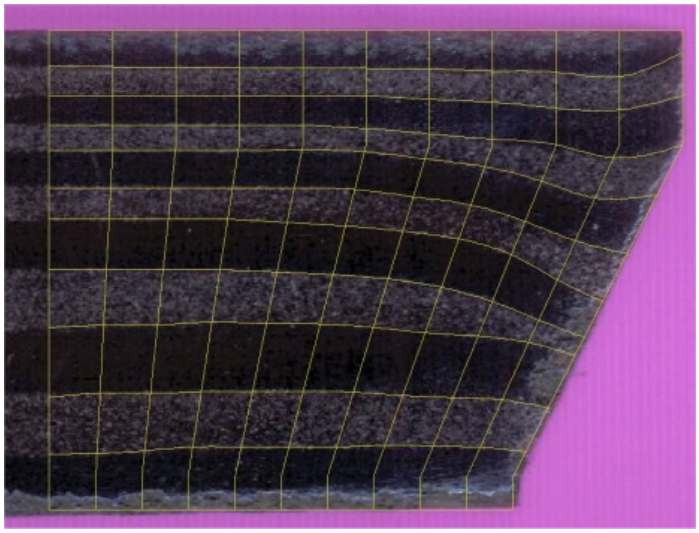
Складову енергетичного функціоналу, що визначається внутрішнім опором деформації, обчислюють у відповідності до (25) з урахуванням (32), (33). Складову, зумовлену тертям, обчислюють у відповідності до (27) з урахуванням (28) і (34):

$$J'_1 = \Sigma \iiint_V \sqrt{(e'_r + e'_z + e'_\varphi)^2 f_1(\theta) + H'^2 f_2(\theta)}\, dV; \qquad (35)$$

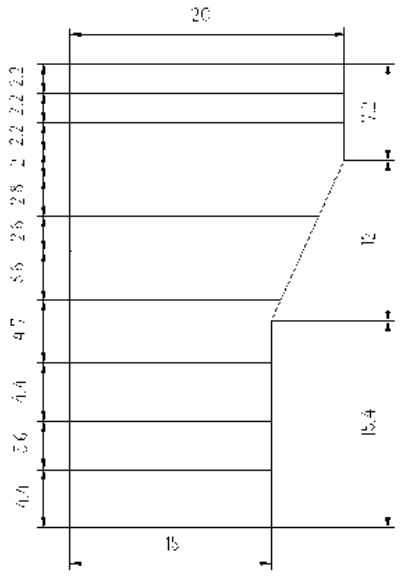
$$J_2^{'} = \sqrt{3\mu}\left( \iint\limits_{F_{Iu}} \sqrt{f_2(\theta) v_{Ir}^{'2}}\, dF_{Iu} + \iint\limits_{F_I} \sqrt{f_2(\theta) v_{\kappa}^{'2}}\, dF_I + \iint\limits_{F_{II}} \sqrt{f_2(\theta) v_{\kappa}^{'2}}\, dF_{II} + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{F_{III}} \sqrt{f_2(\theta) v_{\kappa}^{'2}}\, dF_I + \iint\limits_{F_{IIId}} \sqrt{f_2(\theta) v_{IIIr}^{1\,2}}\, dF_{IIId} \right). \qquad (36)$$

Як у попередньому випадку, мінімізацією енергетичного функціоналу $J^{'} = J_1^{'} + J_2^{'}$ визначають коефіцієнти $a_7 \ldots a_{12}$, після чого розраховують деформацію заготовки та визначають пористість її окремих частин. При цьому зручно накласти на переріз заготовки уявну сітку та розраховувати переміщення її вузлів при деформації.

Відповідність такої моделі ущільнення натурним результатам можна перевіряли застосуванням шаруватих заготовок. Створення шаруватості у двох напрямках виявляється занадто складним, особливо у конічній частині заготовки, але встановлено [3], що при початковій відносній густині заготовки меншій або рівній 50 %, радіальним рухом частинок порошку, зумовленим їхнім перерозподілом у циліндричних частинах при ущільненні, можна знехтувати, тоді достатньо реалізувати шаруватість заготовки тільки в осьовому напрямку. Фотографія перерізу шаруватої циліндроконічної заготовки, виготовленої з порошку заліза, частина якого плакована міддю, наведена на рис. 2, а, на рис. 2, б наведено схему засипання прес-форми для отримання такої заготовки.



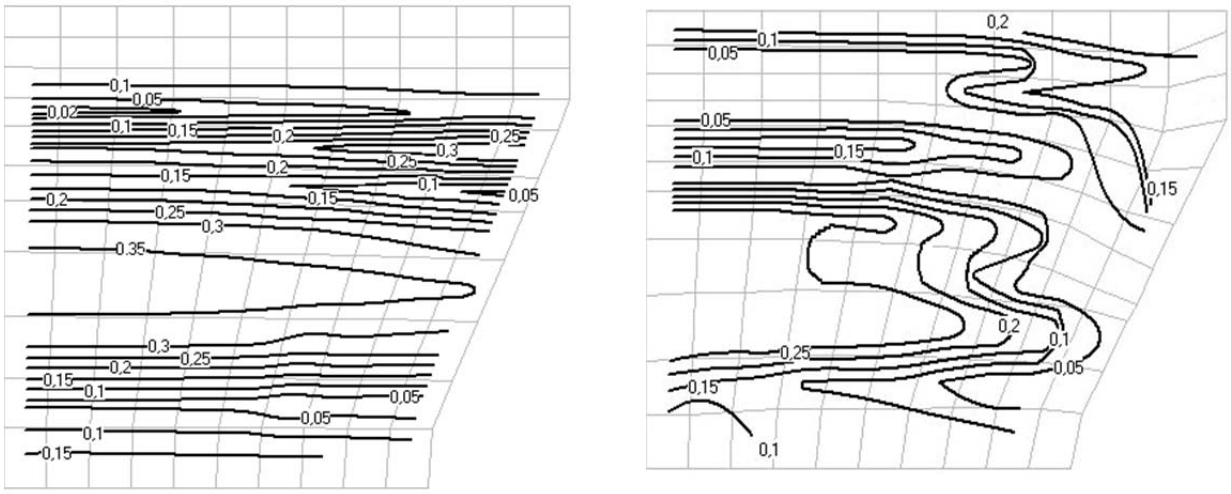
а




б

Рис. 2. Зображення перерізу циліндроконічної шаруватої заготовки після ущільнення (а) і схема засипання порошку у прес-форму (б)

Розрахунок інтегральної густини заготовки згідно запропонованої моделі ущільнення та натурне вимірювання цієї величини дали результати одного порядку (17 % та 12 %, відповідно). На рис. 3, а наведені криві рівної пористості, отримані розрахунковим способом у відповідності з запропонованою моделлю, а на рис. 3, б – візіопластичним методом при обробці зображення перерізу шаруватої моделі. Звертає на себе увагу практичне співпадіння як зон підвищеної густини, так зон підвищеної пористості для обох сукупностей кривих. Наявність цих зон дозволяє очікувати інтенсивну деформацію зсуву при подальшому ущільненні заготовки і як результат – бажану густину кінцевого виробу.




а б

Рис. 3. Криві рівної пористості, отримані розрахунком у відповідності до запропонованої моделі (а) та візіопластичним методом по зображенню перерізу шаруватої заготовки (б)

## ВИСНОВКИ

Запропонована математична модель ущільнення циліндроконічної заготовки у закритій жорсткій матриці дає картину розподілу пористості, що якісно відповідає картині, отриманій експериментальним шляхом. Різниця у значеннях інтегральної густини, отриманих при розрахунку у відповідності з запропонованою моделлю, та при обробці зображення натурної заготовки візіопластичним методом, ймовірно, зумовлена як припущеннями, зробленими при моделюванні, так і похибками обробки зображення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

*1. Баглюк Г. А. Повышение эффективности уплотнения пористых заготовок за счет интенсификации сдвиговых деформаций [Текст] / Г. А. Баглюк // Реологія, структура, властивості порошкових та композиційних матеріалів : зб. наук. праць. – Луцьк : РВВ ЛДТУ, 2004. – С. 35–48.*

*2. Баглюк Г. А. Влияние деформационных параметров на структуру и свойства горячештампованных порошковых материалов [Текст] / Г. А. Баглюк // Обработка материалов давлением : б. науч. тр. – Краматорск : ДГМА, 2011. – № 1 (26). – С. 139–145.*

*3. Хоменко О. І. Урахування радіальної складової швидкості плину порошкових матеріалів при моделюванні процесу ущільнення в закритому штампі [Текст] / О. І. Хоменко, Г. А. Баглюк, В. С. Куріхін // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : зб. наук. праць. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 46. – С. 135–143. (Серія «Нові рішення в сучасних технологіях»).*

*4. Баглюк Г. А. Сравнительный анализ схем нагружения при горячем доуплотнении пористой заготовки в закрытом штампе [Текст] / Г. А. Баглюк, М. Б. Штерн, В. Л. Юрчук // Порошковая металлургия. – 1979. – № 11. – С. 19–22.*

Хоменко О. І. – канд. техн. наук, ст. науч. сотруд. ІПМ НАН України;

Баглюк Г. А. – д-р техн. наук, ст. науч. сотруд. ІПМ НАН України;

Куріхін В. С. – аспірант ІПМ НАН України.

ІПМ – Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича Національної академії наук України, м. Київ.

E-mail: home-n-cow@yandex.ru

*Стаття надійшла до редакції 16.12.2013 р.*